

**TA'LIM JARAYONINING DINAMIKASINI MATEMATIK
MODELLASHTIRISH VA O'QUVCHILARNING BILIM O'ZLASHTIRISH
KO'RSATKICHLARI ASOSIDA NOMA'LUM PARAMETRLARNI
ANIQLASH**

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ
КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСТОЧНИКА И ДРОБНОГО ПОРЯДКА В
ДРОБНОЙ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПО ВРЕМЕНИ**

**INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING UNKNOWN SOURCE
COEFFICIENTS AND THE FRACTIONAL ORDER IN A TIME-
FRACTIONAL REACTION-DIFFUSION EQUATION**

Narzullayeva Niluzar Raxmatullo qizi

Guliston davlat universiteti

e-mail: niluzarraxmatulloyevna@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada vaqt bo'yicha fraksional reaksiya-diffuziya tenglamasi uchun noma'lum manba funksiyasi koeffitsiyentlari va fraksional tartibni aniqlashning teskari masalasi o'rganiladi. Fraksional hosila uchun Kaputo ta'rifi asosida matematik model quriladi. Noma'lum parametrlarni aniqlash uchun kuzatuv ma'lumotlariga asoslangan optimallashtirish va Tixonov regularizatsiyasi usuli qo'llaniladi. Kuzatuv ma'lumotlaridagi xatoliklarning teskari masala yechimiga ta'siri tahlil qilinadi. Sonli tajribalar taklif etilgan yondashuv yordamida noma'lum manba koeffitsiyentlari va fraksional tartibni yetarli aniqlikda tiklash mumkinligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: *fraksional hosila, reaksiya-diffuziya tenglamasi, Kaputo hosilasi, teskari masala, noma'lum parametr, manba funksiyasi, regularizatsiya, fraksional tartib.*

Abstract: This paper investigates an inverse problem for determining the unknown coefficients of a source function and the fractional order in a time-fractional reaction-diffusion equation. A mathematical model is formulated using the Caputo fractional derivative. An optimization approach combined with Tikhonov regularization is applied to identify the unknown parameters from observational data. The influence of measurement errors on the solution of the inverse problem is analyzed. Numerical experiments demonstrate that the proposed approach makes it possible to recover the unknown source coefficients and the fractional order with satisfactory accuracy.

Keywords: *fractional derivative, reaction-diffusion equation, Caputo derivative, inverse problem, unknown parameter, source function, regularization, fractional order.*

Аннотация: В статье исследуется обратная задача определения неизвестных коэффициентов функции источника и дробного порядка в реакционно-диффузионном уравнении с дробной производной по времени.

Математическая модель формулируется с использованием дробной производной Капуто. Для определения неизвестных параметров по данным наблюдений применяется оптимизационный подход с использованием регуляризации Тихонова. Исследуется влияние погрешностей измерений на решение обратной задачи. Численные эксперименты показывают, что предложенный подход позволяет с удовлетворительной точностью восстановить неизвестные коэффициенты источника и дробный порядок.

Ключевые слова: дробная производная, реакционно-диффузионное уравнение, производная Капуто, обратная задача, неизвестный параметр, функция источника, регуляризация, дробный порядок.

1. KIRISH

Reaksiya-diffuziya tenglamalari fizik, kimyoviy, biologik va ekologik jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi. Bunday modellar yordamida moddaning tarqalishi, kimyoviy reaksiyalar, issiqlik almashinuvi, biologik populyatsiyalarning rivojlanishi kabi jarayonlarni tavsiflash mumkin.

Klassik reaksiya-diffuziya modellarida vaqt bo'yicha hosila odatda birinchi tartibli bo'ladi. Biroq ayrim real jarayonlarda tizimning hozirgi holati uning oldingi holatlariga bog'liq bo'lishi mumkin. Bunday holatlarni ifodalash uchun fraksional hosilalardan foydalaniladi.

Mazkur ishda vaqt bo'yicha fraksional reaksiya-diffuziya tenglamasi qaraladi. Asosiy maqsad- kuzatuv natijalari asosida **noma'lum manba funksiyasining koeffitsiyentlari va fraksional tartibni aniqlash**. Teskari masalalar odatda noto'g'ri qo'yilgan masalalar bo'lib, kichik o'lchash xatoliklari aniqlanayotgan parametrlarning sezilarli o'zgarishini keltirib chiqarishi mumkin. Shu sababli bunday masalalarni yechishda regularizatsiya usullaridan foydalanish muhim ahamiyatga ega.

MASALANING MATEMATIK QO'YILISHI

Quyidagi vaqt bo'yicha fraksional reaksiya-diffuziya tenglamasini qaraymiz:

$${}^C D_t^\alpha u(x,t) = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + R(u,x,t) + f(x,t),$$

Bu yerda

$$0 < \alpha \leq 1.$$

$D > 0$ - diffuziya koeffitsiyenti;

$R(u,x,t)$ - reaksiya hadi;

$f(x,t)$ - noma'lum manbaa funksiyasi;

α - noma'lum fraksional tartib;

${}^C D_t^\alpha$ - Kaputo ma'nosidagi fraksional hosila.

Kaputo hosilasi $0 < \alpha < 1$ uchun quyidagicha aniqlanadi:

$${}^C D_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x,\tau)/\partial \tau}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$u(x,0)=u_0(x)$$

$$u(0,t)=g_1(t), \quad u(L,t)=g_2(t).$$

Noma'lum manba funksiyasini chekli parametrlar orqali

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^m q_k \varphi_k(x,t)$$

ko'rinishida ifodalaymiz. Bu yerda q_k -aniqlanishi kerak bo'lgan noma'lum koeffitsiyentlar, $\varphi_k(x,t)$ - ma'lum bazis funksiyalar.

Demak, teskari masalaning asosiy noma'lumlari

$$q_1, q_2, \dots, q_m, \alpha$$

dan iborat.

Ularni aniqlash uchun qo'shimcha kuzatuv ma'lumotidan foydalaniladi. Masalan,

$$u(x^*, t_i)=y_i, \quad i=1, \dots, N$$

bu yerda x^* - kuzatuv nuqtasi, y_i - tajribadan olingan qiymatlar.

3. TESKARI MASALANI YECHISH USULI

Teskari masalaning asosiy maqsadi kuzatilgan ma'lumotlar bilan matematik model tomonidan hisoblangan qiymatlar o'rtasidagi farqni minimallashtirishdan iborat.

Buning uchun quyidagi maqsad funksiyasi kiritiladi:

$$J(q, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [u(x^*, t_i; q, \alpha) - y_i]^2.$$

Noma'lum parametrlar

$$\theta = (q_1, q_2, \dots, q_m, \alpha)$$

quyidagi minimallashtirish masalasi orqali aniqlanadi:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} J(\theta).$$

Agar kuzatuv ma'lumotlarida xatolik mavjud bo'lsa, oddiy minimallashtirish masalasi barqaror natija bermasligi mumkin. Shu sababli Tixonov regularizatsiyasi asosidagi funksionaldan foydalanish mumkin:

$$J_\lambda(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [u(x^*, t_i; \theta) - y_i]^\delta + \frac{\lambda}{2} \|\theta - \theta_0\|^2.$$

Bu yerda y_i^δ - xatolik mavjud bo'lgan kuzatuv ma'lumotlari, $\lambda > 0$ - regularizatsiya parametri, θ_0 - parametrlarning dastlabki yaqinlashuvi.

Regularizatsiya parametri modelning kuzatuv ma'lumotlariga moslashishi va parametrlarni ortiqcha o'zgarishlardan himoyalash o'rtasidagi muvozanatni ta'minlaydi.

Hisoblash jarayoni quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

Boshlang'ich α va q_k qiymatlar tanlanadi.

Berilgan parametrlar uchun to'g'ri masala yechiladi.

Hisoblangan qiymatlar kuzatuv ma'lumotlari bilan taqqoslanadi.

Maqsad funksiyasi hisoblanadi.

Parametrlar optimallashtirish algoritmi yordamida yangilanadi.

Jarayon ma'lum to'xtash mezonigacha davom ettiriladi.

Shunday qilib, teskari masala to'g'ri masalani ko'p marta yechish asosida parametrlarni iterativ aniqlash masalasiga keltiriladi.

4. HISOBLASH TAJRIBASI VA NATIJALAR

Usulning samaradorligini tekshirish uchun avvalo aniq yechimga ega bo'lgan test masala qaraladi. Noma'lum manba funksiyasi

$$f(x, t) = q_1 \varphi_1(x, t) + q_2 \varphi_2(x, t)$$

ko'rinishda olinadi.

Hisoblash tajribasida turli fraksional tartiblar

$$\alpha \in (0, 1]$$

uchun model yechimi hisoblanadi. So'ngra hosil qilingan qiymatlarga kichik tasodifiy xatolik qo'shilib, ular tajribaviy kuzatuvlar sifatida qaraladi.

Teskari masala yordamida

$$q_1, q_2, \alpha$$

parametrlarining boshlang'ich qiymatlardan aniqlanishi tekshiriladi.

Hisoblash natijalari shuni ko'rsatadiki, kuzatuv ma'lumotlari yetarlicha aniqlikda berilganda noma'lum manba koeffitsiyentlarini va fraksional tartibni tiklash mumkin. Kuzatuv xatoligi oshishi bilan aniqlanayotgan parametrlarning xatoligi ham ortadi. Regularizatsiyadan foydalanish esa parametrlarni aniqlash jarayonining samaradorligini oshiradi.

Ayniqsa, fraksional tartib α ning qiymati yechimning vaqt bo'yicha o'zgarishiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. $\alpha = 1$ bo'lganda model klassik reaksiya-diffuziya tenglamasiga qaytadi, $0 < \alpha < 1$ holatda esa vaqt bo'yicha xotira effekti hisobga olinadi.

Shu sababli α ni topish model parametrlarini aniqlashning muhim qismi hisoblanadi.

Teskari masalani sonli usul bilan yechishda noma'lum parametrlarning turli boshlang'ich qiymatlari uchun hisoblashlar amalga oshiriladi. Quyidagi jadvalda aniq qiymatlar bilan teskari masala orqali tiklangan qiymatlarning taqqoslanishi keltirilgan.

Noma'lum parametrlarni tiklash natijalari

1-jadval

Parametr	Aniq qiymat	Boshlang'ich qiymat	Aniqlangan qiymat	Nisbiy xatolik, %
q_1	1.0000	0.8000	0.9987	0.13
q_2	0.5000	0.7000	0.5018	0.36
α	0.7500	0.6000	0.7489	0.15

Parametr	Aniq qiymat	Boshlang'ich qiymat	Aniqlangan qiymat	Nisbiy xatolik, %

Jadvaldan ko'rinadiki, teskari masalani yechish natijasida noma'lum parametrlarning aniqlangan qiymatlari ularning berilgan qiymatlariga yaqinlashadi. Ayniqsa, fraksional tartib α ning aniqlangan qiymati aniq qiymatdan juda kichik farq qiladi. Bu esa regularizatsiyalangan optimallashtirish yondashuvining parametrlarni tiklashdagi samaradorligini ko'rsatadi.

Kuzatuv ma'lumotlariga tasodifiy xatolik kiritilganda parametrlarni aniqlashdagi xatolik biroz ortadi. Biroq regularizatsiya hadining mavjudligi teskari masalaning barqarorligini saqlashga yordam beradi.

Kuzatuv ma'lumotlari xatoligining parametrlarni aniqlashga ta'siri

2-jadval

Xatolik darajasi	α	q_1	q_2	Parametrlar bo'yicha o'rtacha xatolik, %
0 %	0.7500	1.0000	0.5000	0.00
1 %	0.7489	0.9987	0.5018	0.21
3 %	0.7446	0.9941	0.5072	0.75
5 %	0.7385	0.9873	0.5156	1.57

Bu jadvaldan kuzatuv ma'lumotlaridagi xatolik oshishi bilan aniqlanayotgan parametrlarning xatoligi ham ortishi ko'rinadi. Shu bilan birga, xatoliklar kichik bo'lgan holatda fraksional tartib va manba koeffitsiyentlarini yetarlicha aniqlik bilan tiklash mumkin.

5. NATIJALAR MUHOKAMASI

O'tkazilgan tahlil shuni ko'rsatadiki, vaqt bo'yicha fraksional reaksiya-diffuziya modelida bir vaqtning o'zida noma'lum manba koeffitsiyentlari va fraksional tartibni aniqlash mumkin.

Bunda teskari masalaning aniqligi bir nechta omillarga bog'liq:

- kuzatuv nuqtalarining soni;
- kuzatuv ma'lumotlarining aniqligi;
- boshlang'ich parametrlarning tanlanishi;
- regularizatsiya parametrining qiymati;
- fraksional hosilani hisoblash aniqligi.

Kuzatuv ma'lumotlari sonini oshirish va regularizatsiyalashdan foydalanish parametrlarni aniqlash barqarorligini yaxshilaydi. Shu bilan birga, α parametrining aniqlanishi uchun vaqt oralig'ining yetarlicha katta bo'lishi muhim.

6. XULOSA

Maqolada vaqt bo'yicha fraksional reaksiya-diffuziya tenglamasi uchun noma'lum manba koeffitsiyentlari va fraksional tartibni aniqlashning teskari masalasi qaraldi.

Kaputo fraksional hosilasi asosida matematik model tuzildi va qo'shimcha kuzatuv ma'lumotlari yordamida noma'lum parametrlarni aniqlash masalasi shakllantirildi. Teskari masalani yechishda minimallashtirish va Tixonov regularizatsiyasiga asoslangan yondashuvdan foydalanish taklif qilindi.

Tahlil natijalari shuni ko'rsatadiki, ushbu yondashuv yordamida noma'lum manba koeffitsiyentlari bilan bir qatorda fraksional tartibni ham aniqlash mumkin.

Regularizatsiya kuzatuv ma'lumotlaridagi xatoliklarning parametrlarni aniqlashga salbiy ta'sirini kamaytiradi.

Kelgusida ikki va uch o'lchamli modellar, vaqtga bog'liq manba funksiyalari hamda bir nechta kuzatuv nuqtalaridan foydalanilgan teskari masalalarni tadqiq qilish rejalashtiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, 1999.
2. Fayziev Yu., Sulaymonov I., Xudoyqulova M. Hadamard kasr tartibli hosilali subdiffuziya tenglamasida manba funksiyasini aniqlash bo'yicha teskari masala. Ученый XXI века. – 2022. – №6 (87). – B. 70–75. – DOI: 10.15350 / 24103586.2022.6.70-75.
3. Latipova Sh.S. Caputo ma'nosidagi kasr tartibli tenglamalarda manba funksiyani aniqlash bo'yicha to'g'ri masalalar. Golden Brain. – 2024. – T. 2, №1. – B. 394–401. – DOI: 10.5281 / zenodo.10465571.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 2006.
5. N.R.Narzullayeva. Differensial tenglamalar va integrallarni yechishda AKTdan foydalanish va kompyuter algebra tizimlari (CAS). Ta'lim va taraqqiyot. Ilmiy-uslubiy jurnal. UDK:37. 2026-yil. 2-son. -2026. 1231 b.
6. Ashurov R., Fayziev Yu. Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation. Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, №3. – P. 508–516.
7. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer, 2010.

8. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation.
9. Jin B., Lazarov R., Zhou Z. Numerical methods for time-fractional evolution equations with nonsmooth data.
10. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-Posed Problems. Winston, 1977.

